Méca S4
Juin 2014

Cours :

1) tige homogène

$$I_{Oz} = \int_0^l \lambda z^2 dz \qquad \text{avec } dm = \lambda dz$$

$$I_{Oz} = \lambda \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^l = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \boxed{\frac{m l^2}{3}}$$

(ou avec th de Huyghens)

2) disque homogène :

$$I_{Cz} = \iint \sigma (x^2 + y^2) dS \qquad \text{avec } dm = \sigma dS$$

$$I_{Cz} = \iint \sigma r^2 \times 2\pi r\, dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

$$I_{Cz} = \cancel{2\pi} \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} \times \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2} = \boxed{\frac{M R^2}{2}}$$

3) Dans le cas d'une liaison parfaite, la puissance des actions de contact s'annule. On peut en déduire les équations du mouvement (conservation de l'énergie méca ou du moment cinétique sur l'axe de rotation)

II) Problème : Mouvement d'un cylindre. (1)

1) Cylindre plein homogène :

Par définition, $I_{Gz} = \iiint_{(V)} dm\,(x^2+y^2)$

La répartition étant <u>volumique</u>, $dm = \rho\, dV$ (ρ masse volumique)

$I_{Gz} = \iiint_{(V)} \rho\, dV\,(x^2+y^2) = \rho \iiint_{(V)} dV\,(x^2+y^2)$ (homogène $\Rightarrow \rho = cte$)

On se place en coord <u>cylindriques</u> (r_1, φ, z), d'où $r_1^2 = x^2+y^2$

$I_{Gz} = \rho \iiint_{(V)} dV\,(r_1^2)$ et $dV = r_1\, dr_1\, d\varphi\, dz$

$I_{Gz} = \rho \iiint_{(V)} r_1\, dr_1\, d\varphi\, dz\,(r_1^2) = \rho \iiint_{(V)} r_1^3\, dr_1\, d\varphi\, dz$

avec $\begin{cases} r_1 \text{ de } 0 \to r \\ \varphi \text{ de } 0 \to 2\pi \text{ et } z \text{ de } 0 \to h \end{cases}$

$I_{Gz} = \rho \int_0^r r_1^3\, dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 2\pi h \rho \left[\frac{r_1^4}{4}\right]_0^r = \pi h \rho \left(\frac{r^4}{2}\right)$

avec $\rho = \frac{m}{V}$ ← masse cylindre / ← vol cylindre

Or le volume du cylindre est $V = \iiint r_1\, dr_1\, d\varphi\, dz = 2\pi h \int_0^r r_1\, dr_1 = \pi r^2 h$

d'où $I_{Gz} = \frac{\pi h m}{V}\left(\frac{r^4}{2}\right) = \frac{\cancel{\pi}\cancel{h} m}{\cancel{\pi} r^2 \cancel{h}}\left(\frac{r^{\cancel{4}\,2}}{2}\right)$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{m r^2}{2}}$$

2) Vitesse de glissement :

Par définition, $\underline{\vec{v_g} = \vec{V}_{I \in C_1}}$, car la vitesse de C_2 est nulle.

Puisqu'il y a roulement sans glissement, $\underline{\vec{v_g} = \vec{0}}$.

②

D'après la relation des vitesses dans un solide, (ici C_1)

$$\vec{V}_{I\in C_1} = \vec{V}_{G/R} + (\vec{\omega}_{C_1/R} \wedge \vec{GI})$$

or G étant repéré par l'angle θ,

$$\vec{OG} = (R+r)(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x})$$

$$\vec{V}_{G/R} = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{OG}}{d\theta}\right) \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = (R+r)(-\sin\theta\,\vec{e_y} - \cos\theta\,\vec{e_x})\,\dot{\theta}$$

$\hookrightarrow \|\vec{V}_G\| = (R+r)\dot{\theta}$

La rotation propre du cylindre étant repérée par φ :

$$\vec{\omega}_{C_1/R} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z}$$

En projetant sur $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$, $\vec{GI} = -r\,\vec{e_\theta} = -r(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x})$

$$\vec{\omega}_{C_1/R} \wedge \vec{GI} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z} \wedge -r(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x})$$

$$= -r\dot{\varphi}\,\vec{e_z} \wedge (\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x})$$

$$= -r\dot{\varphi}\,\cancel{\times}\left(-[\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}]\right)$$

d'où $\vec{V}_{I\in C_1} = [-r\dot{\varphi} + (R+r)\dot{\theta}](-\cos\theta\,\vec{e_x} - \sin\theta\,\vec{e_y})$

donc $\vec{V}_{I\in C_1} = \vec{0}$ si $r\dot{\varphi} = (R+r)\dot{\theta}$

$$\boxed{\dot{\varphi} = (r+R)\frac{\dot{\theta}}{r}}$$

3) Energie cinétique de C_1.

D'après le théorème de Köenig, $E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}(I_{Gz}\,\omega^2_{C_1/R})$

En remplaçant V_G et I_{Gz} par leur valeur :

$$E_c = \frac{1}{2}m[(R+r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2$$

En utilisant la condition du ②

$$E_c = \frac{1}{2}m[(R+r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\cancel{r^2}}{2}\right)\left[\frac{(r+R)\dot{\theta}}{\cancel{r}}\right]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(r+R)^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \times \frac{3}{2} (R+r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{3m}{4} (r+R)^2 \dot{\theta}^2}$$

4) Énergie potentielle de pesanteur :

$$\vec{P} = -\vec{\text{grad}}\, E_p(\vec{P})$$

$$-mg\,\cancel{\vec{e_y}} = -\frac{\partial E_p(\vec{P})}{\partial y}\,\cancel{\vec{e_y}}$$

$$E_p(\vec{P}) = mg\,y_g + c^{te}$$

$$E_p(\vec{P}) = mg(R+r)\cos\theta + c^{te}$$

Or on sait que : $E_p(\vec{P}) = 0$ pour $\theta = 0$ d'où $mg(R+r) + c^{te} = 0$

$$c^{te} = -mg(R+r)$$

$$\boxed{E_p(\vec{P}) = mg(R+r)(\cos\theta - 1)}$$

5) La puissance des actions de contact est nulle car $P = \vec{R}.\vec{V}_{I_1}$ et I_1 est fixe

d'où $\frac{dE_m}{dt} = P^{nc} = 0$

$$E_m = c^{te} = E_p + E_c$$

Or on sait que, à $t=0$, $E_p = 0$ et $E_c = 0$ donc $E_m = 0$

donc $\forall \theta$, $E_m = 0$

$$\frac{3\cancel{m}}{4}(R+r)^{\cancel{2}}\dot{\theta}^2 + \cancel{m}g\,(R\cancel{+r})(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\boxed{\frac{3}{4}(R+r)\dot{\theta}^2 + g(\cos\theta - 1) = 0}$$

d'où : $\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} g \frac{(1-\cos\theta)}{(R+r)}$ (attention, on peut le remplacer dans une équation, mais ne pas intégrer)

D'où l'équation du mouvement : $\frac{dE_m}{d\theta} = 0$

$$\frac{3}{4}\left((R+r)\times 2\ddot{\theta}\right)+g(-\sin\theta)=0$$

$$\boxed{\frac{3}{2}(R+r)\ddot{\theta}-g\sin\theta=0}$$

Inutile

6) on sait que $\vec{V_G} = -(R+r)\dot{\theta}\left(\sin\theta\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_x}\right)$

d'où $\vec{a_G} = \dfrac{d\vec{V_G}}{dt} = -(R+r)\ddot{\theta}\left(\sin\theta\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_x}\right) \leftarrow \vec{a_T}$

$\qquad -(R+r)\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x}\right)\dot{\theta} \leftarrow \vec{a_N}$

en identifiant avec $\vec{a_G} = \vec{a_N} + \vec{a_T}$

on voit que $\vec{a_N} = -(R+r)\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x}\right)$

En remplaçant $\dot{\theta}^2$ par sa valeur,

$$\vec{a_N} = -\cancel{(R+r)}\times\frac{4}{3}g\frac{(1-\cos\theta)}{\cancel{(R+r)}}\underbrace{\left(\cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x}\right)}_{\uparrow\vec{e_r}}$$

$$\boxed{\vec{a_N} = -\frac{4}{3}g(1-\cos\theta)\,\vec{e_r}}$$

7) D'après la R.F.D, en projetant sur la normale

$$m\vec{a_N} = \vec{N} + (-mg\cos\theta)\vec{e_r}$$

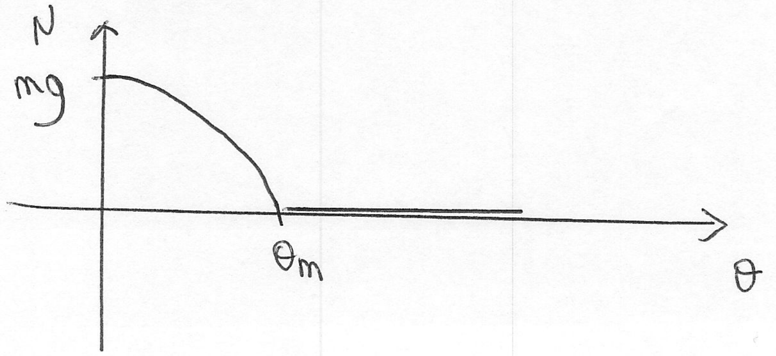
$$\vec{N} = m\left[-\frac{4}{3}g(1-\cos\theta) + g\cos\theta\right]\vec{e_r}$$

$$\vec{N} = mg\left[-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\cos\theta + \cos\theta\right]\vec{e_r} = N\,\vec{e_r}$$

avec $\boxed{N = mg\left(-\frac{4}{3} + \frac{7}{3}\cos\theta\right)}$

8) on pose θ_m tel que $\cos\theta_m = \frac{4}{7}$

Allure de la courbe :



Inutile